



TITLE:

水平正方形ダクトにおける乱流・ 浮力駆動二次流れ (乱流の動力学的 記述と統計力学的記述の相補性)

AUTHOR(S):

関山, 和英; 関本, 敦; 河原, 源太; ウルマン, マルクス;
ピネリ, アルフレド

CITATION:

関山, 和英 ...[et al]. 水平正方形ダクトにおける乱流・浮力駆動二次流れ
(乱流の動力学的記述と統計力学的記述の相補性). 数理解析研究所講究
録 2010, 1721: 124-134

ISSUE DATE:

2010-12

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/170413>

RIGHT:

水平正方形ダクトにおける乱流・浮力駆動二次流れ

大阪大学・大学院基礎工学研究科 関山 和英 (Kazuhide Sekiyama)
大阪大学・大学院基礎工学研究科 関本 敦 (Atsushi Sekimoto)
大阪大学・大学院基礎工学研究科 河原 源太 (Genta Kawahara)
Graduate School of Engineering Science, Osaka University

カールスルーエ工科大学 ウルマン マルクス (Markus Uhlmann)
Institute for Hydromechanics, Karlsruhe Institute of Technology

エネルギー環境技術研究センター ピネリ アルフレド (Alfredo Pinelli)
Modelling and Numerical Simulation Unit, CIEMAT

1 緒言

等温の正方形ダクト乱流には乱流運動により駆動されるいわゆるプラントルの第二種二次流れが現れる。このような乱流駆動二次流れを伴う正方形ダクトを加熱すると、浮力により駆動されるプラントルの第一種二次流れも発生し、乱流と浮力により駆動される二次流れが共存した状態が実現されるものと考えられる。

低レイノルズ数の等温正方形ダクト乱流に対しては、秩序構造すなわち縦渦と乱流二次流れとの関連性が検討されている [1, 2]。低レイノルズ数では縦渦の径とダクト幅とが同程度となるため、側壁の拘束を受けた縦渦がダクト断面の特定の位置に存在し、縦渦の平均場として二次流れが発生する。最近、このような正方形ダクトの秩序構造と二次流れとの直接的な関連性を理論的に示す非線形定常進行波解も発見されている [3]。

本稿では、上の等温ダクトに関する知見を踏まえ、直接数値シミュレーションの結果を解析することで、下方から加熱される水平正方形ダクトに見られる乱流・浮力駆動二次流れの発生と秩序構造との関連性について議論する。

2 数値計算手法

水平に設置された十分に長い正方形断面ダクト内の乱流を考える。ダクトの(水平な)中心軸上に x 軸をとり、鉛直上方に y 軸、それらに垂直な方向に右手系をなすよう z 軸をとる。ダクトの半幅は h であり、ダクトの断面平均流速 u_b を一定に保つ。流体は密度一定であるものとし、その動粘性係数を ν 、熱拡散係数を κ 、体膨脹係数を β とする。速度には壁面上 $y = \pm h$, $z = \pm h$ で非貫通・滑りなし条件を課し、下壁面 $y = -h$ を高温 T_h 、上壁面 $y = +h$ を低温 T_c に保ち、側壁面 $z = \pm h$ に断熱条件を課す。 x 方向には速度場、温度場は周期 $L_x = 4\pi h$ の周期性を有するものとする。

速度 $\mathbf{u} = (u, v, w)$ と圧力 p 、および温度 T の支配方程式は、ブジネスク近似を適用した非圧縮ナビエ・ストークス方程式とエネルギー方程式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + g\beta(T - T_0)\mathbf{e}_y, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T, \quad (3)$$

である。ここで、 \mathbf{e}_y は y 方向の単位ベクトルで、 ρ は流体の密度、 $T_0 = \frac{1}{2}(T_h + T_c)$ は基準温度である。これらの方程式を圧力修正法 [4] によって解く。拡散項に関しては陰解法、対流項と浮力項は 3 段の省メモリ型ルンゲ・クッタ法を用いて陽的に離散化する。空間の離散化に関しては、 x 方向にフーリエ級数展開を、壁面に垂直な方向 (y, z) にはチェビシェフ多項式展開を適用する。非線形項は擬スペクトルの計算し、2/3 則によってフーリエ展開に伴うアライアス誤差を除去する。得られたポアソン方程式とヘルムホルツ方程式は選点上で高速対角化法 [5] を用いて解く。

この系を支配する無次元パラメータは、レイノルズ数

$$Re_b = \frac{u_b H}{\nu}, \quad (4)$$

プラントル数

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad (5)$$

リチャードソン数

$$Ri = \left(\frac{u_g}{u_b} \right)^2 = \frac{g\beta\Delta TH}{u_b^2} \quad (6)$$

の3つである。ここに、 $H = 2h$ はダクトの全幅、 $\Delta T = T_h - T_c > 0$ は下壁面と上壁面の温度差、 $u_g = \sqrt{g\beta\Delta TH}$ は浮力に関連する速度の尺度である。以下では、レイノルズ数を $Re_b = 3000, 4400$ とし、リチャードソン数を $0 \leq Ri \leq 1.03$ の範囲で変化させる。プラントル数 Pr は 0.7 とする。空間分解能に関しては $\Delta x^+ < 16.4, \Delta y^+, \Delta z^+ < 5.4$ であり、時間刻み Δt の値は $\Delta t \max(|u|/\Delta x + |v|/\Delta y + |w|/\Delta z) < 0.3$ となるように選ぶ。ここに、 $(\cdot)^+$ は動粘性係数 ν と摩擦速度 u_τ で規格化された量であることを表す。

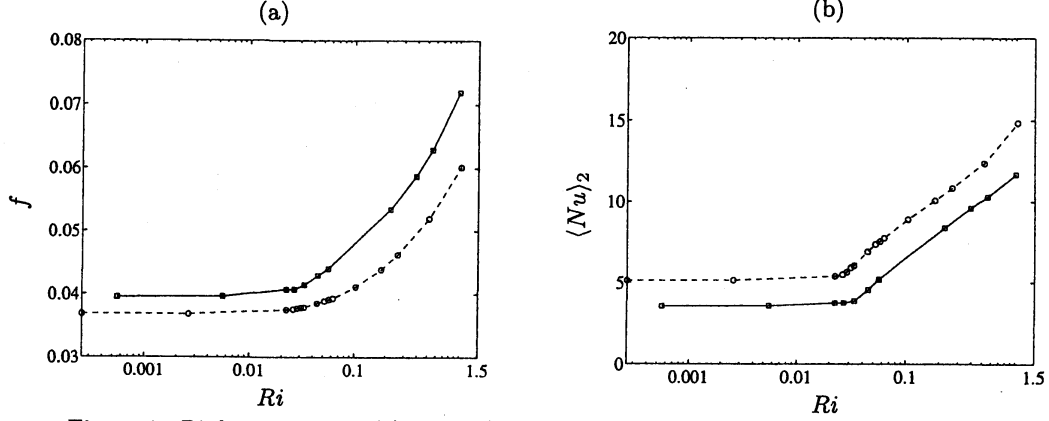


Figure 1: Ri dependence of (a) f and (b) $\langle Nu \rangle_2$. ---, $Re_b = 3000$; —, $Re_b = 4400$.

3 浮力の統計的性質への影響

まず、摩擦係数 $f = 8(u_\tau/u_b)^2$ と平均ヌセルト数 $\langle Nu \rangle_2$ のリチャードソン数依存性について調べる。ここに、 $\langle \cdot \rangle_2$ は2つの水平壁面上での平均を表す。図1に、摩擦係数と平均ヌセルト数のリチャードソン数による変化を示す。摩擦係数と平均ヌセルト数への浮力の影響は $Ri \approx 0.025$ から現れ、その後リチャードソン数の増加に伴って増加を続ける。

つぎに、平均速度、RMS 速度、RMS 温度のスケーリングについて考える。速度、圧力、温度をそれぞれ平均 (\cdot) とそのまわりの揺らぎ $(\cdot)'$ に分解して、式(1)、(3)に代入し、平均をとると、平均速度に関して

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}'v'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{u}'w'}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \right), \quad (7)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}'^2}{\partial y} - \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \right) + g\beta(\bar{T} - T_0), \quad (8)$$

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{\partial \bar{v}'w'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}'^2}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2} \right), \quad (9)$$

平均温度に関して

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} + \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = -\frac{\partial \bar{v}'T'}{\partial y} - \frac{\partial \bar{w}'T'}{\partial z} + \kappa \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \right) \quad (10)$$

を得る。

浮力の平均二次流れへの影響が支配的となる $Ri = O(1)$ の場合には、式(8)中の浮力項と平均流による移流項とのつり合い

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} \sim \bar{w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \sim g\beta(\bar{T} - T_0), \quad (11)$$

すなわち

$$\frac{u_\perp^2}{H} \sim g\beta\Delta T, \quad (12)$$

ゆえに

$$u_\perp \sim u_g = \sqrt{g\beta\Delta TH} \quad (13)$$

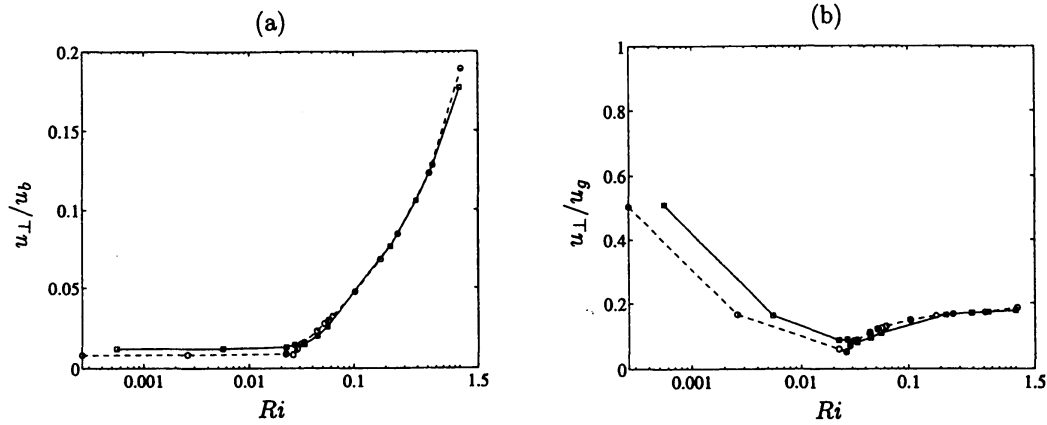


Figure 2: Ri dependence of u_{\perp} normalized by (a) u_b and (b) u_g , respectively. - - -, $Re_b = 3000$; —, $Re_b = 4400$.

が成り立っていると考えられる。ここに、二次流れの速度の代表値を $u_{\perp} = \sqrt{\overline{v^2} + \overline{w^2}}$ とし、以後 $\langle \cdot \rangle = \int_{-h}^{+h} \int_{-h}^{+h} (\cdot) dy dz / (4h^2)$ と表す。それぞれ u_b と u_g で規格化した u_{\perp} の Ri による変化を図2に示す。図2(a)から、 u_{\perp} は浮力の弱い $Ri \lesssim 0.025$ では一定値となっている。このリチャードソン数の範囲では、二次流れに浮力が影響を与えておらず、乱流場は等温ダクト乱流と同様の状態にあると考えられる。しかし、 $Ri \approx 0.025$ を超えると u_{\perp} が急激に増加しており、浮力が二次流れに影響を与え始めている。 $Ri \gtrsim 0.025$ では u_{\perp} はリチャードソン数の増加に伴い増加を続ける。一方、図2(b)によると、 $Ri \gtrsim 0.25$ において u_{\perp}/u_g はほぼ一定値をとり、式(13)に示したように、 u_{\perp} が u_g でスケールリングできることが確認できる。

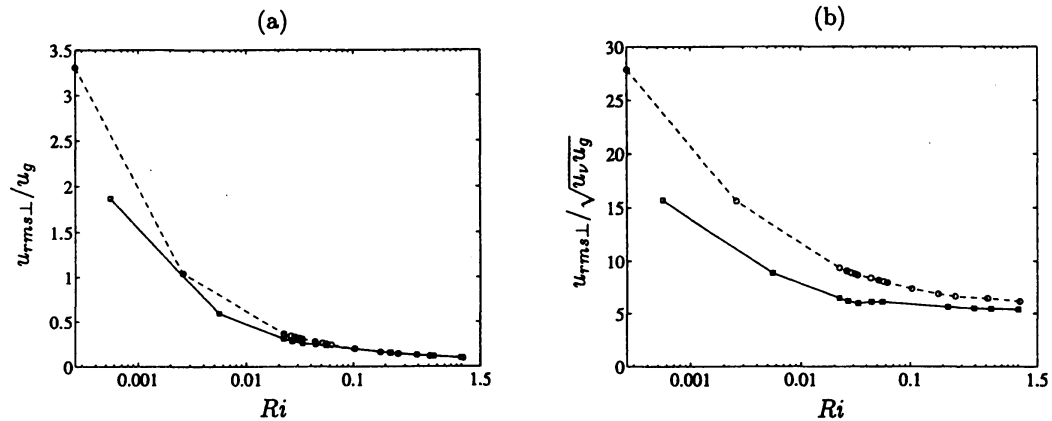


Figure 3: Ri dependence of $u_{rms\perp}$ normalized by (a) u_g and (b) $\sqrt{u_v u_g}$, respectively. - - -, $Re_b = 3000$; —, $Re_b = 4400$.

以上の結果から

- ・ $0 \leq Ri \lesssim 0.025$, 乱流により駆動される二次流れ
- ・ $0.025 \lesssim Ri \lesssim 0.25$, 乱流と浮力により駆動される二次流れ
- ・ $Ri \gtrsim 0.25$, 浮力により駆動される二次流れ

と考えることができる。

つぎに、速度と温度の揺らぎのスケールリングについて考える。式(8)の乱流に対する移流項と他の項とのつり合いには2つの可能性がある。その1つは平均流に対する移流項とのつり合い

$$\overline{v} \frac{\partial \overline{v}}{\partial y} \sim \overline{w} \frac{\partial \overline{v}}{\partial z} \sim \frac{\partial \overline{v'^2}}{\partial y} \sim \frac{\partial \overline{v'w'}}{\partial z} \quad (14)$$

であり、これと式(13)から

$$u_{rms\perp} \sim u_{\perp} \sim u_g \quad (15)$$

が得られる。ここに、 $u_{rms\perp} = \sqrt{\langle v'^2 \rangle}$ は、ダクト中心軸垂直方向の RMS 速度の代表値を表す。もう 1 つの可能性は平均流に対する粘性項とのつり合い

$$\frac{\partial v'^2}{\partial y} \sim \frac{\partial v'w'}{\partial z} \sim \nu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2} \sim \nu \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2} \quad (16)$$

であり、これは

$$u_{rms\perp}^2 \sim \nu \frac{u_\perp}{H} \quad (17)$$

と評価でき、式 (13) を用いると

$$u_{rms\perp} \sim \sqrt{u_\nu u_g} \quad (18)$$

が得られる。ここに、 $u_\nu = \nu/H$ は粘性に関連する速度の尺度である。図 3 は、それぞれ u_g と $\sqrt{u_\nu u_g}$ で規格化した $u_{rms\perp}$ の Ri に対する変化を示したものである。この図 3(a) から $u_{rms\perp}/u_g$ には Ri の増加とともにゼロに近づく傾向が見られる。一方、図 3(b) から $u_{rms\perp}/\sqrt{u_\nu u_g}$ は、 Ri の増加につれ有限値に漸近する様子が認められる。このことから、 $u_{rms\perp}$ は u_g よりむしろ $\sqrt{u_\nu u_g}$ によって規格化されるものと考えられる。

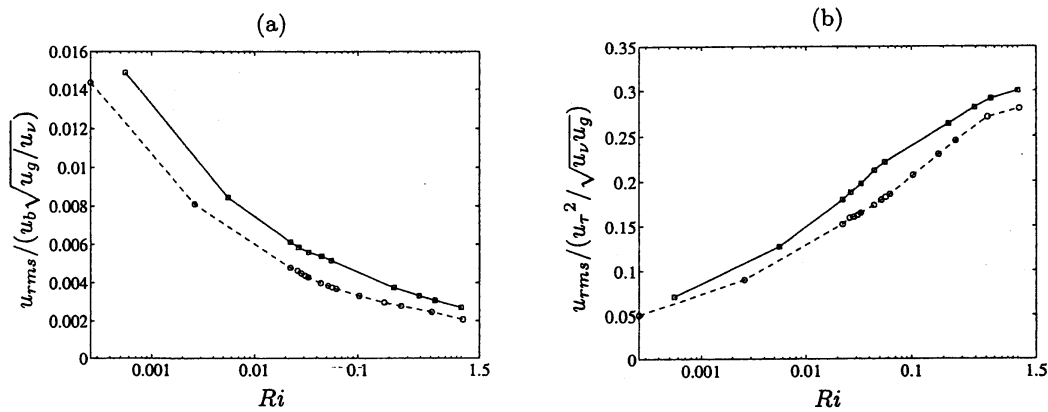


Figure 4: Ri dependence of u_{rms} normalized by (a) $u_b \sqrt{u_g / u_\nu}$ and (b) $u_\tau^2 / \sqrt{u_\nu u_g}$, respectively. ---, $Re_b = 3000$; —, $Re_b = 4400$.

つぎに、ダクト中心軸方向速度に関する式 (7) を考える。乱流に対する移流項と他の項とのつり合いには 2 つの可能性がある。その 1 つは平均流に対する移流項とのつり合い

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \sim \bar{w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} \sim \frac{\partial u'v'}{\partial y} \sim \frac{\partial u'w'}{\partial z} \quad (19)$$

であり、これより

$$u_\perp u_b \sim u_{rms} u_{rms\perp} \quad (20)$$

と評価される。ここに、 $u_{rms} = \sqrt{\langle u'^2 \rangle}$ はダクト中心軸方向 RMS 速度の代表値を表す。式 (13), (18) を用いれば、この式から

$$u_{rms} \sim u_b \sqrt{\frac{u_g}{u_\nu}} \quad (21)$$

が得られる。もう 1 つは平均流に対する粘性項とのつり合い

$$\frac{\partial u'v'}{\partial y} \sim \frac{\partial u'w'}{\partial z} \sim \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial y^2} \sim \nu \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial z^2} \quad (22)$$

であり、これより

$$u_{rms} u_{rms\perp} \sim u_\tau^2 \quad (23)$$

と評価される。したがって、式 (13), (18) から

$$u_{rms} \sim \frac{u_\tau^2}{\sqrt{u_\nu u_g}} \quad (24)$$

を得る。図4は、 u_{rms} をそれぞれ $u_b\sqrt{u_g/u_\nu}$ と $u_\tau^2/\sqrt{u_\nu u_g}$ で規格化したものの Ri に対する変化を示す。図4(a) から $u_{rms}/(u_b\sqrt{u_g/u_\nu})$ は Ri の増加とともに単調に減少しているが、他方、図4(b) から $u_{rms}/(u_\tau^2/\sqrt{u_\nu u_g})$ は Ri による増加が飽和する傾向を示している。したがって、 u_{rms} は $u_b\sqrt{u_g/u_\nu}$ よりも $u_\tau^2/\sqrt{u_\nu u_g}$ によってスケールされることが示唆される。

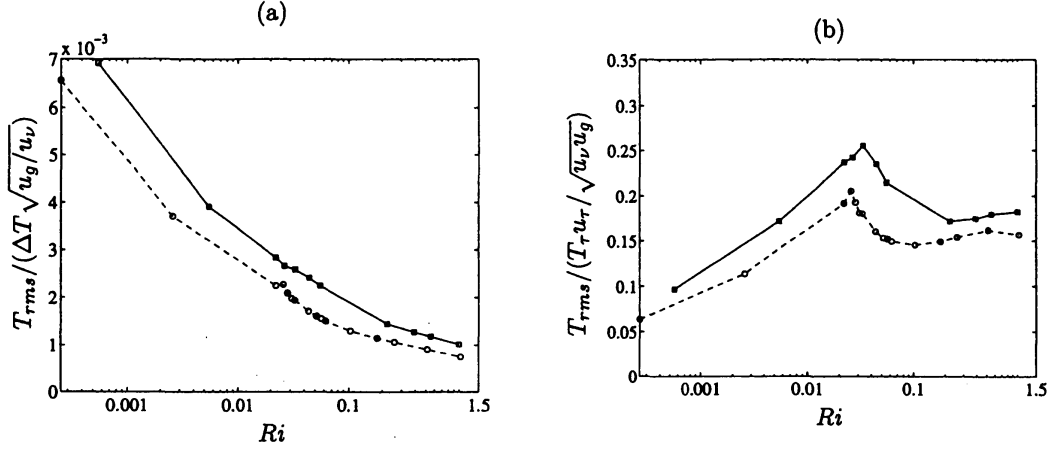


Figure 5: Ri dependence of T_{rms} normalized by (a) $\Delta T\sqrt{u_g/u_\nu}$ and (b) $T_\tau u_\tau / \sqrt{u_\nu u_g}$, respectively. ---, $Re_b = 3000$; —, $Re_b = 4400$.

最後に RMS 温度に関する式(10)を考える。温度乱れに対する移流項と他の項とのつり合いには2つの可能性がある。その1つは平均温度に対する移流項とのつり合い

$$\bar{v} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \sim \bar{w} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} \sim \frac{\partial \bar{v}'T'}{\partial y} \sim \frac{\partial \bar{w}'T'}{\partial z} \quad (25)$$

であり、これより

$$u_\perp \Delta T \sim u_{rms\perp} T_{rms} \quad (26)$$

と評価される。式(13)、(18)を用いると

$$T_{rms} \sim \Delta T \sqrt{\frac{u_g}{u_\nu}} \quad (27)$$

が得られる。ここに、 $T_{rms} = \sqrt{\langle T'^2 \rangle}$ は RMS 温度の代表値を表す。もう1つは平均温度に対する拡散項とのつり合い

$$\frac{\partial \bar{v}'T'}{\partial y} \sim \frac{\partial \bar{w}'T'}{\partial z} \sim \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} \sim \kappa \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial z^2} \quad (28)$$

であり、これより

$$u_{rms\perp} T_{rms} \sim u_\tau T_\tau \quad (29)$$

と評価され、式(18)から

$$T_{rms} \sim T_\tau \frac{u_\tau}{\sqrt{u_\nu u_g}} \quad (30)$$

が得られる。ここに、 $T_\tau = (1/u_\tau)\kappa(\partial T/\partial y)_2$ は摩擦温度を表す。図5は T_{rms} をそれぞれ $\Delta T\sqrt{u_g/u_\nu}$ 、 $T_\tau u_\tau / \sqrt{u_\nu u_g}$ で規格化したものの Ri に対する変化を示す。単調減少を続ける図5(a)に対して、(b)は Ri の増加とともに一定になる傾向が認められることから、RMS 温度は $T_\tau u_\tau / \sqrt{u_\nu u_g}$ によって規格化されるものと考えられる。

以上のように、二次流れへの浮力の影響が支配的となる $Ri = O(1)$ では、ダクト中心軸に垂直な方向の RMS 速度、ダクト中心軸方向の RMS 速度、そして RMS 温度は、それぞれ式(18)、(24)、(30)によりスケールリングできることが示唆された。これらのスケールリングは全て、乱流運動と分子運動とによる運動量、熱の輸送のつり合いによって決定されたものである。

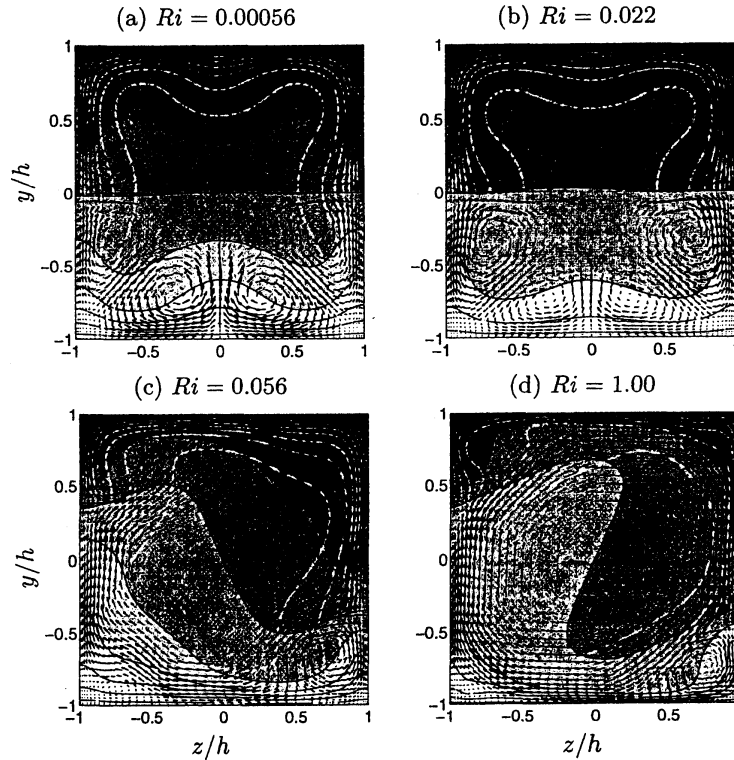


Figure 6: Cross-sectional distributions of mean streamwise and cross-streamwise velocities and mean temperature at $Re_b = 3000$. White curves denote iso-contours of mean streamwise velocity. Temperature is represented in gray-scale; white is the highest, while black is the lowest. Mean cross-streamwise velocity is shown by vectors. (a) $Gr = 5.0 \times 10^3$, (b) $Gr = 2.0 \times 10^5$, (c) $Gr = 5.0 \times 10^5$, (d) $Gr = 9.0 \times 10^6$.

4 流れ場の浮力による変化

この節では $Re_b = 3000, 4400$ の場合の平均速度場 $\bar{\mathbf{u}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$, 平均温度場 \bar{T} , RMS 速度場 $\sqrt{u'^2}$, RMS 温度場 $\sqrt{T'^2}$ を示す。

図 6, 7 に平均速度場と温度場を示す。白線は流れ方向速度の等値線であり、黒線は温度の等値線、矢印はダクト中心軸垂直方向速度を表す。温度場は白い領域が高温領域、黒い領域が低温領域を表す。 Ri が小さい図 6, 7(a) の場合には、浮力の影響はほとんど認められず、それぞれの壁面付近に渦が 2 つずつ存在する 8 つ渦パターンの二次流れが確認できる。浮力の影響が現れ始める $Ri \approx 0.025$ の図 7(b) では、8 つ渦パターンの対称性が崩れ、時計回りの 4 つの渦が減衰している。 Ri が大きくなると (図 6, 7(c)), 浮力の作用によりダクト中心軸を中心とする時計回りの 1 つの大規模な循環流が形成され、8 つ渦のうちの時計回りの渦は消滅し、反時計回りの 4 つの渦のみがダクト角部に存在している。Ma ら [6] は、鉛直壁を加熱、冷却し、水平壁を断熱した水平正方形ダクト乱流において、これと同様の平均流のパターンを観測している。さらに Ri が大きくなると (図 6, 7(d)), 角部の 4 つの反時計回りの渦のうち、左下と右上の角部における渦は収縮し、左上と右下の角部の渦のみが持続する。

なお、図 6, 7 では、時計回りの大規模な循環流が実現された場合を示しているが、系のもつ対称性から反時計回りの循環流が現れる場合もある。循環流が時計回り、反時計回りであるかは、初期値に依存して決まる。循環流の回転の向きがいったん決定されると、時間発展においてその向きが入れ替わることは、少なくとも $1000u_b/h$ の時間では観測されなかった。また、瞬時場においてダクト軸に沿って循環流の回転の向きが入れ替わることも観測されなかった。本稿では時計回りの循環流が現れる場合のみを示すことにする。

浮力の影響が強い場合 (図 6, 7(d)) には、角部に存在していた 4 つの渦のうち、左上と右下の渦のみがはっきりと確認できる。この現象を理解するため二次元正方形容器内の定常な熱対流の計算を行った結果を図 8 に示す。この計算では、本稿で議論しているダクト内複合対流乱流と同一の境界条件を課した。図中の大規模循環流にも、ダクト内複合対流と同様に逆向きのものも存在するが、ここでは時計回りの場合の熱対流場を示す。図 8 によると、定常二次元熱対流場においては、大規模循環流に加え、左上と右下の角部に循環流と逆回転の渦が存在している。したがって、図 6; 7(c, d) に認められる左上と右下の角部における渦は浮力により駆動される二次流れであり、一方、左下と右上の渦は乱流により駆

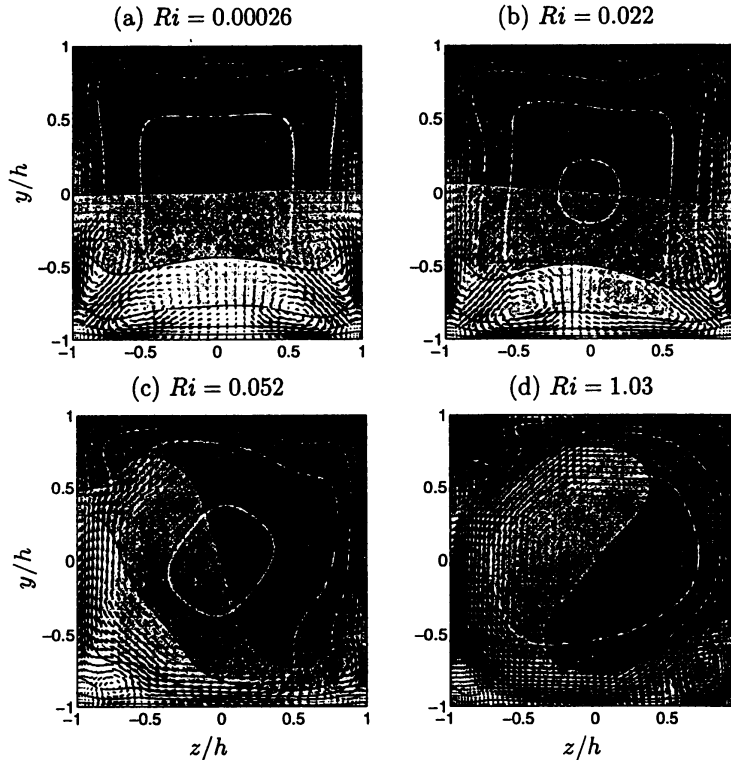


Figure 7: Cross-sectional distributions of mean streamwise and cross-streamwise velocities and mean temperature at $Re_b = 4400$. White curves denote iso-contours of mean streamwise velocity. Temperature is represented in gray-scale; white is the highest, while black is the lowest. Mean cross-streamwise velocity is shown by vectors. (a) $Gr = 5.0 \times 10^3$, (b) $Gr = 4.3 \times 10^5$, (c) $Gr = 1.0 \times 10^6$, (d) $Gr = 2.0 \times 10^7$.

動される二次流れであると考えられる。角部における乱流駆動二次流れについては後に議論する。図 8 と同様の熱対流の流動パターンは、鉛直壁に断熱条件でなく熱伝導状態の温度分布を境界条件として課した正方形容器内の熱対流に対しても観測されている [7]。

このような熱対流における左上と右下の角部での渦の生成メカニズムは、つぎのように解釈できる。下壁面（あるいは上壁面）上で加熱（あるいは冷却）された流体は、固体壁面における非貫通条件の拘束の下で壁面に沿ってほぼ水平に運動するため、浮力効果による加速は顕著でない。加熱（あるいは冷却）された後、循環流の作用で流体が鉛直壁面上に移動すると、水平壁面による非貫通拘束を受けず、浮力により鉛直上方（あるいは下方）に加速される。この結果、水平壁面と鉛直壁面上の流体の水平方向速度と鉛直方向速度の大きさには差が生じ、鉛直壁面上での鉛直方向の速度が大きくなる。この鉛直向き的高速な流体が水平壁面に衝突するため、図 8 の左上と右下の角部では高圧となり（図省略）、この圧力上昇のため流れの剥離が発生し、左上と右下の角部に剥離泡（図中の太実線）すなわち循環流と逆回転の渦が生成されることになる。

図 9, 10 にダクト中心軸方向の RMS 速度 $\sqrt{u'^2}$ および RMS 温度 $\sqrt{T'^2}$ の分布を示す。図 9 を見ると、 Ri の増加に伴い、時計回りの大規模循環流の移流効果により、 $\sqrt{u'^2}$ の大きい領域が壁面中央から角に向かって移動している（図 (c, d, g, h)）。循環流による大規模な移流とその後の乱流拡散の効果によって、ダクト中心軸付近では速度および温度の分布が一様化し（図 6, 7(d)）、その結果、ダクト中心軸垂直方向の流体の運動に伴う乱れが小さくなる（図 9, 10(d, h)）。浮力が支配的となる $Ri \sim 1$ においても存在する左上と右下の角部の渦（図 6, 7(d)）の中心付近ではダクト軸方向 RMS 速度、RMS 温度のいずれも小さくなっていることが確認できる（図 9, 10(d, h)）。図 6, 7(d) の左上と右下の渦は、図 8(b) に示したように、浮力により駆動される循環流に付随する剥離泡である。その外部の速度や温度の乱れは剥離泡内部に直接影響を及ぼさないため、剥離泡内では流れは比較的静穏な状態にあり、その結果、左上と右下の角部では RMS 速度、RMS 温度が小さくなるものと考えられる。その反面、剥離泡の界面では、壁近傍で生成された速度や温度の乱れに伴う流れが壁面から剥がれるため、RMS 速度、RMS 温度が大きくなっているものと考えられる（図 9, 10(d, h)）。

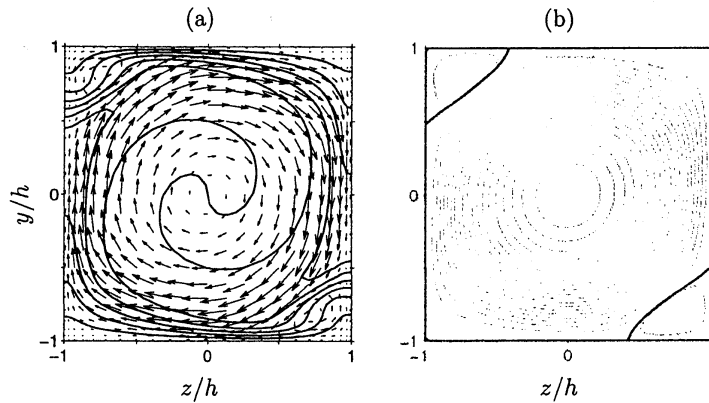


Figure 8: Two-dimensional steady thermal convection at $Gr = 1.0 \times 10^6$. (a) Distributions of velocity and temperature represented by vectors and isotherms, respectively. (b) Streamfunction ψ represented by iso-contours, i.e., streamlines. The bold iso-contour denotes the value $\psi = 0$ for the wall boundary.

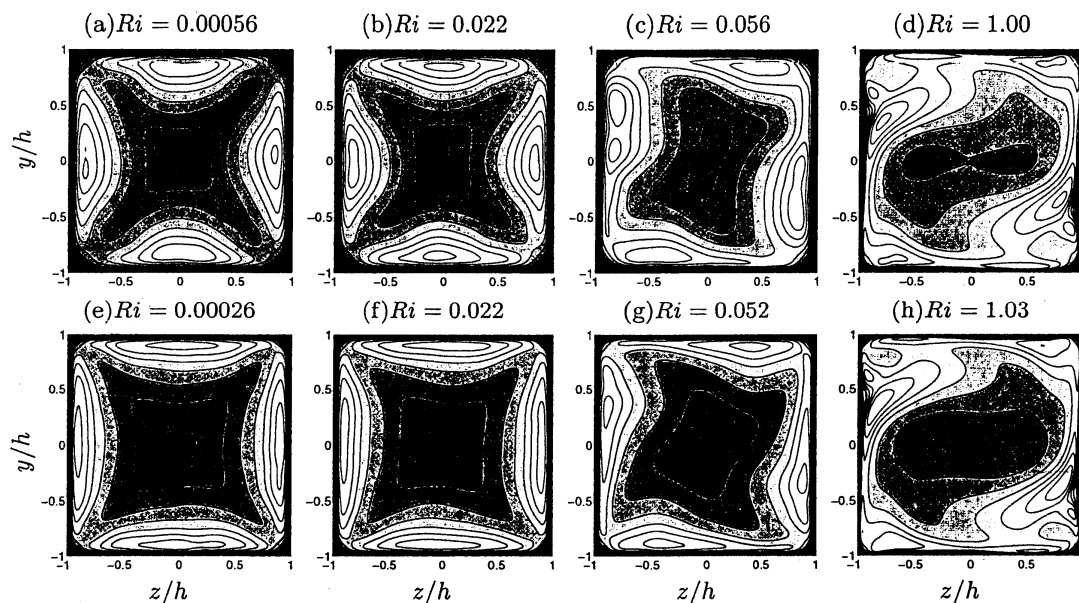


Figure 9: Cross-sectional distributions of streamwise r.m.s. velocity represented in gray-scale. White is the highest, while black is the lowest. (a-d) $Re_b = 3000$, (e-h) $Re_b = 4400$. $Gr =$ (a) 5.0×10^3 , (b) 2.0×10^5 , (c) 5.0×10^5 , (d) 9.0×10^6 (e) 5.0×10^3 , (f) 4.3×10^5 , (g) 1.0×10^6 , (h) 2.0×10^7 .

5 秩序構造への浮力の影響

図 11 に異なる Ri における正方形ダクト乱流における瞬時の乱流構造を示す。この図から、加熱ダクトにおいても等温の場合と同様に、灰色（時計回り）と黒色（反時計回り）の管状曲面で可視化された縦渦および灰色の波打った網目で可視化された低速ストリークが存在することがわかる。図 11(a) のように浮力の影響が弱いと、縦渦と低速ストリークは壁面の中央付近に存在し、これらの構造の寄与により速度や温度の乱れが壁面中央付近で大きくなる（図 9, 10(a, b, e, f)）。 Ri が大きくなり浮力の影響が強くなると（図 11(b)），縦渦は、循環流の効果で角に向かって移流されるため、壁面中央よりも角部に存在するケースが多くなり、その結果 RMS 速度は角部付近において大きくなる（図 9(c, g)）。 $Ri \sim 1$ となると（図 11(c)），主流と循環流の速度が同程度となり、縦渦もストリークも流れ方向から壁面に沿ってスパン方向に傾きをもつようになる。以下では、瞬時の縦渦構造への浮力の影響を定量的に調べ、その影響が二次流れのパターンの変化にどのように関連するのかを見る。

ダクト断面における縦渦の位置を定量的に捉えるため、縦渦の中心を、ダクト断面上での巡回条件 $D < 0$ [8] を満足する圧力極小点と定義する。ここに、 $D = (\partial v / \partial y - \partial w / \partial z)^2 / 4 + (\partial v / \partial z)(\partial w / \partial y)$ はダクト断面における速度勾配テンソルの判別式である。縦渦のダクト断面における中心位置に関する確率密度関数 (PDF) を図 12 に示す。図 12(a) は正（時計回り）のダクト中心軸 (x) 方向の渦度をもつ縦渦の中心位置に関する PDF であり、図 12(b) は負（反時計回り）の渦度をもつ縦渦の PDF である。こ

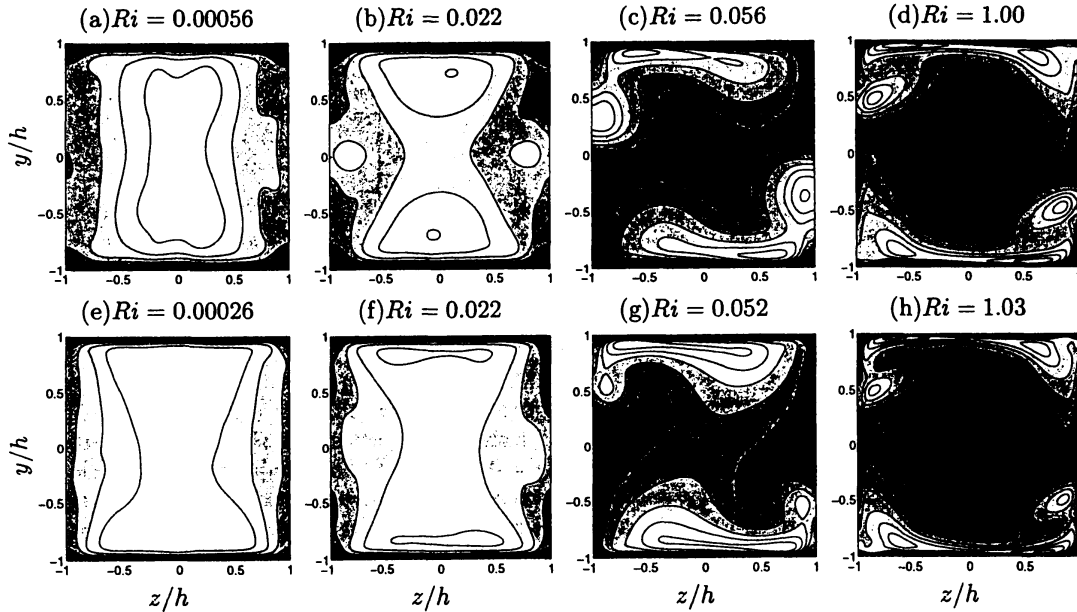


Figure 10: Cross-sectional distributions of r.m.s. temperature represented in gray-scale. White is the highest, while black is the lowest. (a–d) $Re_b = 3000$, (e–h) $Re_b = 4400$. $Gr =$ (a) 5.0×10^3 , (b) 2.0×10^5 , (c) 5.0×10^5 , (d) 9.0×10^6 (e) 5.0×10^3 , (f) 4.3×10^5 , (g) 1.0×10^6 , (h) 2.0×10^7 .

これらの図を見ると、渦構造はその渦度の正負に関わらず壁面付近に存在する頻度が高く、いわゆる壁近傍乱流の秩序構造である縦渦構造が検出されていることが確認できる。しかし、角部において正負の各渦度をもつ縦渦のPDFを比較すると、両者には顕著な相違が認められる。すなわち、角部においては、浮力により駆動される大規模循環流とは逆回転となる負の渦度をもつ縦渦（図 12(b)）の存在頻度が高くなっており、負の渦度をもつ縦渦のPDFが極大となる位置は、図 12(c) に示すダクト中心軸方向の平均渦度の角部における極小点と一致している。この極小点は、図 7(c) の角部に認められる循環流と逆回転の4つの二次流れ渦の中心に対応する。角部においては、循環流とは逆回転の縦渦の存在頻度が高いために、これらの瞬時の秩序構造の平均として、循環流とは逆回転の4つの渦が角部に出現するものといえる。角部以外の領域では、渦度の正負によって縦渦のPDFには著しい相違は認められず、反対符号の縦渦の誘導する速度が相殺する結果、秩序構造による平均二次流れへの影響は現れないと考えられる。

以上で見たような角部において循環流と反対回転の縦渦の存在頻度が高くなる現象のメカニズムは、縦渦に対する循環流と角部の幾何学的拘束とによって説明できる。縦渦構造は細長い管状の形態をもち、概ねダクト中心軸方向に向いている。また、縦渦の動力学への粘性の影響は、決定的に重要ではないと考えられる。したがって、ここでは縦渦をダクト中心軸に平行な強さ γ の非粘性渦糸によって近似し、角部における2壁面の縦渦への影響を3本の鏡像渦糸によって近似する。さらに、浮力により駆動される大規模循環流の移流効果を、ダクト中心軸上に固定した強さ $\Gamma > 0$ の時計回りの渦糸とその3本の鏡像渦糸によって近似的に表現する。縦渦とダクトの中心との距離を l_c 、縦渦とダクトの角あるいはダクト壁との距離を l_w とすると、循環流により縦渦が受ける移流速度の程度は Γ/l_c 、縦渦が角部で誘導する速度の程度は γ/l_w となる。ダクト乱流では、 l_c は外部尺度 h 、 l_w は内部尺度 ν/u_τ の程度であるが、低レイノルズ数の場合には外部尺度と内部尺度に大差はなく、 $l_c \sim l_w$ であると考えられる。したがって、循環流の移流速度と縦渦の誘導速度との比は $(\Gamma/l_c)/(\gamma/l_w) \sim \Gamma/\gamma$ と評価される。さらに、浮力が誘起する速度 u_g と摩擦速度 u_τ を用いると、この比は $\Gamma/\gamma \sim u_g/u_\tau$ となる。

図 13 は、ダクト断面に存在する縦渦上に角部と循環流の効果により生じる速度をベクトル場として示したものである。図 13(a), (b) では、循環流の強さは同一であり、縦渦の回転の向きだけが異なる。これらの図では $\Gamma/\gamma (\sim u_g/u_\tau) = \pm 3.3$ であり、この値は図 7(c) に示す $Ri = 0.052$, $Re_b = 4400$ の乱流場に相当する。循環流と逆回転する縦渦に対する図 13(b) では、縦渦上の速度のベクトル場は閉じた軌道を示し、比較的弱い循環流の下では循環流と逆回転の縦渦が角付近に定在できることを示している。しかし、図 13(a) に示すように、循環流と同一回転の縦渦のベクトル場には閉じた軌道は現れず、同一回転の縦渦は角部に定在できず、角部から循環流の移流効果によって流れ去ってしまう。一方、図 13(c) は、比較的強い循環流の下での循環流と逆回転の縦渦のベクトル場を示す。この場合 $\Gamma/\gamma (\sim u_g/u_\tau) = -11.7$ であり、図 7(d) に示す $Ri = 1.03$, $Re_b = 4400$ の乱流場に相当する。強い循環流の下では循環流と逆回転の縦渦が定在できる領域は角近傍に限られ、図 7(d) に示した左下と右上の二次流れ渦の角近傍への収縮がこれに対応すると考えられる。

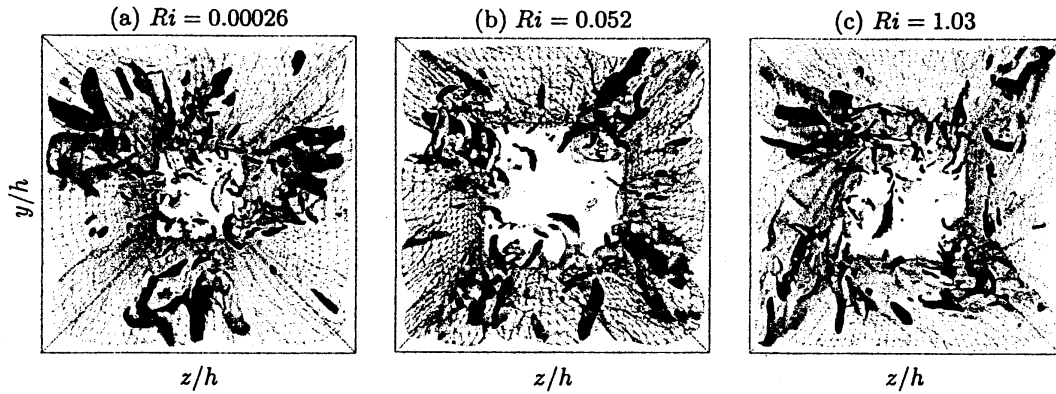


Figure 11: Visualization of instantaneous flow structures at $Re_b = 4400$ for (a) $Gr = 5.0 \times 10^3$, (b) $Gr = 1.0 \times 10^6$, (c) $Gr = 2.0 \times 10^7$. Streamwise (x -oriented) vortices are shown by iso-surfaces of the second invariant of a velocity gradient tensor, $Q = 0.03(u_x^2/\nu)^2$. Gray objects represent clockwise vortices of positive streamwise vorticity, and black ones represent counter-clockwise vortices of negative streamwise vorticity. Low-velocity streaks are identified by corrugated gray meshes representing an iso-surface of streamwise velocity $u = 0.6u_b$.

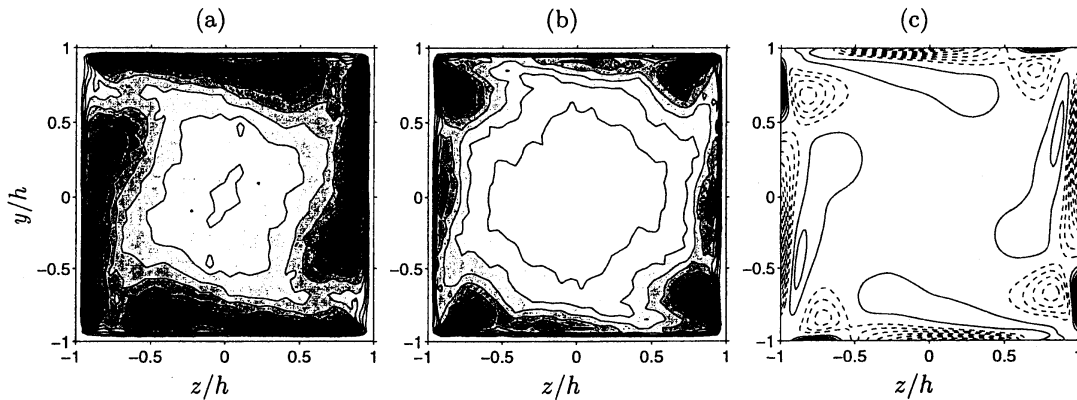


Figure 12: P.d.f.s of the positions of vortex centers and mean streamwise vorticity at $Re = 4400$ and $Ri = 0.052$ ($Gr = 1.0 \times 10^6$). P.d.f. is shown in gray-scale for (a) clockwise vortices with positive vorticity and (b) counter-clockwise vortices with negative vorticity; black is the highest, while white is the lowest. (c) Cross-sectional distribution of mean streamwise vorticity represented by iso-contours; negative (counter-clockwise) contours are dashed.

6 結言

不安定成層下で浮力の影響を受ける水平な正方形ダクト内の低レイノルズ数乱流 ($Re_b = 3000, 4400$) に対する直接数値シミュレーションを行った。これらのレイノルズ数では、リチャードソン数が $Ri \approx 0.025$ を超えると、乱流により駆動される速度と浮力で駆動される速度とが同程度となるため、乱流と浮力によって駆動されるこの系に固有の平均二次流れが発生する。この二次流れは、浮力により駆動されるダクト中心軸まわりの1つの大規模循環流、および乱流により駆動される各角部に1つずつ存在する渦によって特徴づけられる。この循環流は Ri の増加とともに強められ、その結果、摩擦係数および平均ヌセルト数を上昇させる。角部における二次流れ渦は大規模循環流と逆向きに回転し、循環流と逆回転のこの渦の生成は、壁乱流中に現れる瞬時の秩序構造である縦渦に対する、循環流による移流効果と角部における幾何学的拘束によって説明することができる。すなわち、循環流と逆回転する縦渦は角部を構成する非貫通壁面の拘束から循環流とは逆方向の誘導速度を受けるため、循環流の移流効果に抗して角部付近に定在し、その平均場として循環流と逆回転の二次流れ渦を発生させる。

さらにリチャードソン数が大きくなると ($Ri \geq 0.25$)、平均二次流れへの浮力の影響が支配的となる。この場合には、平均二次流れは、大規模循環流とそれに付随して発生する2つの角における剥離渦によって特徴づけられ、剥離渦内部においては乱れの弱い静穏な状態が現れる。

また、二次流れへの浮力の影響が支配的となる $Ri \sim 1$ において、二次流れの平均速度、速度や温度の乱れのスケールリングについて検討した。二次流れの平均速度の大きさは、平均流による移流と浮力の

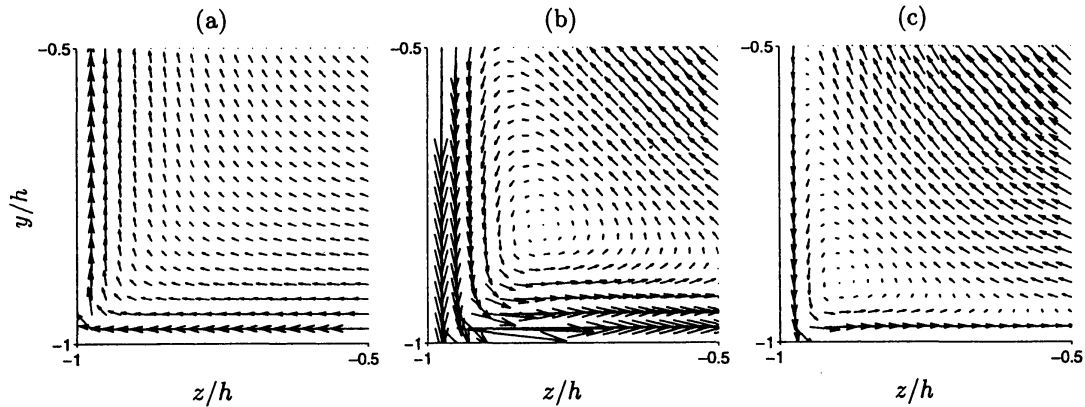


Figure 13: Cross-sectional velocity vector fields of the vortex filament of strength γ induced by its three images expressing the two impermeable walls and by the filament of strength $\Gamma (> 0)$ representing the (clockwise) large-scale circulation and being fixed at $(y/h, z/h) = (0, 0)$. (a) The clockwise vortex filament subjected to the weaker circulation, $\Gamma/\gamma (\sim u_g/u_\tau) = 3.3$. (b) The counter-clockwise vortex filament subjected to the weaker circulation, $\Gamma/\gamma (\sim u_g/u_\tau) = -3.3$. (c) The counter-clockwise vortex filament subjected to the stronger circulation, $\Gamma/\gamma (\sim u_g/u_\tau) = -11.7$.

効果のつり合いで決まり、 $u_g = \sqrt{g\beta\Delta TH}$ の程度と評価された。ダクト中心軸に垂直な方向の速度乱れの大きさは、乱流による移流と粘性の効果のつり合いによって決定され、 $\sqrt{(\nu/H)u_g}$ の程度となることが示唆された。ダクト中心軸方向の速度乱れについても、乱流による移流と粘性の効果のつり合いにより、 $u_\tau^2/\sqrt{(\nu/H)u_g}$ の程度となることが示唆された。さらに、温度揺らぎについても、乱流による移流と拡散の効果のつり合いによって決まり、 $T_\tau u_\tau/\sqrt{(\nu/H)u_g}$ の程度となることが示唆された。

京都大学藤定義先生には、数理解析研究所研究集会にて本研究を発表した後、正方形容器内熱対流において角部に現れる剥離渦の生成に関して有益なご議論を頂いた。ここに記して謝意を表する。

文献

- [1] Uhlmann, M., Pinelli, A., Kawahara, G., and Sekimoto, A., *J. Fluid Mech.*, **588** (2007), 153–162.
- [2] Pinelli, A., Uhlmann, M., Sekimoto, A., and Kawahara, G., *J. Fluid Mech.*, **644** (2010), 107–122.
- [3] Uhlmann, M., Kawahara, G., and Pinelli, A., (2010), to appear in *Phys. Fluids*.
- [4] Verzicco, R. and Orlandi, P., *J. Comput. Phys.*, **123** (1996), 402–414.
- [5] Haldenwang, P., Labrosse, G., Abboudi, S. and Deville, M., *J. Comput. Phys.*, **55** (1984), 115–128.
- [6] Ma, L.-D., Li, Z.-Y. and Tao, W.-Q., *Heat Mass Transfer*, **44** (2007) 229–250.
- [7] Mizushima, J. and Adachi, T., *J. Phys. Soc. Japan* **66** (1997) 79–90.
- [8] Kida, S. and Miura, H., *J. Phys. Soc. Japan*, **67** (1998), 2166–2169.